

NOM :

Prénom :

Rouge entourez l'épreuve

entourez le Jury A B C D E F

Sujet choisi : Legon 155: Exponentielle de matrices.

Autre sujet :

 $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.I) Exponentielle de matricesa) Définitions et propriétés [BER]Prop 1: Soit $A \in \mathcal{M}(K)$ et $\|\cdot\|$ une norme sur K^n .Alors $\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ est une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}(K)$.Def 2: Soit $A \in \mathcal{M}(K)$. La série $\sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!}$ est convergente, et on définit l'exponentielle de A par : $e^A = \sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!}$.Ex 3: Si $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(K)$, $e^A = \begin{pmatrix} e^{\alpha_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\alpha_m} \end{pmatrix}$.Lemme 4: Soit $A \in \mathcal{M}(K)$. e^A est un polynôme en A .Corollaire 5: Soit $A \in \mathcal{M}(K)$. A et e^A commutent.Prop 6: $\exp: \mathcal{M}(K) \rightarrow \mathcal{M}(K)$ est continue.Prop 7: Si $A, B \in \mathcal{M}(K)$ commutent, alors $e^{A+B} = e^A e^B$.C. ex 8: Faux si A et B ne commutent pas: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}^*$ et $e^A e^B \neq e^{A+B}$.Cor 9: Soit $A \in \mathcal{M}(K)$. e^A est inversible, d'inverse e^{-A} .Prop 10: Soit $A \in \mathcal{M}(K)$. $\forall P \in \text{GL}_n(\mathbb{C}), e^{PAP^{-1}} = P e^A P^{-1}$.Cor 11: Soit $A \in \mathcal{M}(K)$. Alors $\det(e^A) = e^{\text{tr}(A)}$.b) Calculs explicites [BER]Prop 12: Si $N \in \mathcal{M}(K)$ est nilpotente d'indice $p \in \mathbb{N}^*$, on a : $e^N = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{N^k}{k!}$.Ex 13: Si $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e^N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Prop 14: Si $A \in \mathcal{M}(K)$ est diagonalisable, il existe $P \in \text{GL}_n(K)$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ avec $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq m}$ valeurs propres de A tq $A = P D P^{-1}$.
Ainsi, $e^A = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_m} \end{pmatrix} P^{-1}$.Prop 15: Soit $A \in \mathcal{M}(K)$ comme ci-dessus. (Polynôme interpolateur) On construit $Q \in K[X]$ tel de Lagrange)que : $\forall i \in \{1, \dots, m\}, Q(\lambda_i) = e^{\lambda_i}$.On a alors $e^A = Q(A)$.Ex 16: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ -4 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ diagonalisable et $\text{Sp}(A) = \{1, 4, 3\}$.On a alors $Q(X) = e^1 \frac{X-3}{2} \frac{X-4}{3} + e^3 \frac{X-1}{2} \frac{X-4}{-1} + e^4 \frac{X-1}{3} \frac{X-3}{3}$ Ainsi, $e^A = \frac{e^1}{6}(A-3)(A-4) - \frac{e^3}{2}(A-1)(A-4) + \frac{e^4}{3}(A-1)(A-3)$ c) Logarithme matriciel [MAN]Def 17: Soit $N \in \mathcal{M}(K)$ nilpotente d'indice $p \in \mathbb{N}^*$.Le logarithme de la matrice $I_m + N$ est

$$\ln(I_m + N) = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} N^k.$$

Prop 18: Soit $N \in \mathcal{M}(K)$ nilpotente. Alors les matrices $\ln(I_m + N)$ et $e^N - I_m$ sont nilpotentes et : $e^{\ln(I_m + N)} = I_m + N$ et $\ln(e^N) = N$.Ex 19: Si $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ on a :

$$\ln(e^N) = \sum_{k=1}^2 \frac{(-1)^{k-1}}{k} \left(N + \frac{N^2}{2}\right)^k = I_m + N^2 = N.$$

II) Propriétés analytiques de l'exp. matricielle

a) Différentiabilité [ROM]

Prop 20: $\exp: \mathcal{M}_n(K) \rightarrow \mathcal{M}_n(K)$ est de classe C^1 avec pour $X, H \in \mathcal{M}_n(K)$:

$$d(\exp)(X)(H) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{i=0}^{k-1} X^i H X^{k-1-i} \right)$$

Ex 21: $d(\exp)(0) = I_n$.

b) Injectivité et surjectivité [BER]

Prop 22: Soit $C \in \mathcal{M}_n(K)$. On déf $C[C]^* = C[C] \cap GL_n(C)$.

Lemme 23: $\exp: (C[C], +) \rightarrow (C[C]^*, \cdot)$ est un morphisme de groupes. $+ C[C]^*$ est un grp.

Thm 24: $\exp: \mathcal{M}_n(C) \rightarrow GL_n(C)$ est surjective, $\hookrightarrow + C$ est un pol en C .

App 25: $GL_n(C)$ est connexe par arcs.

App 26: Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Si $A \in GL_n(C)$, il existe $X \in [A]^*$ tq $X^p = A$.

Rq 27: $\exp: \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas surjective.

C.ex 28: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \notin \exp(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$.

Rq 29: En revanche, $\exp$ n'est pas injective sur $GL_n(K)$: $e^{0n} = I_n = \exp\begin{pmatrix} 2i\pi & 0 \\ 0 & 2i\pi \end{pmatrix} = \exp\begin{pmatrix} 0 & -2\pi \\ 2\pi & 0 \end{pmatrix}$.

Prop 30: Si $\text{Sp}_C(A) \subset \mathbb{R}_+^*$, alors $A \in \exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

Prop 31: Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. On sq A est semblable sur $\mathbb{C}$ à une matrice $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, $B \in GL_n(\mathbb{C})$. Alors $A \in \exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

Rq 32: En particulier, toute matrice $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ avec $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

Ex 33: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \exp(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$.

Cor 34: Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Si A est sans valeurs propres réelles, alors $A \in \exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

Rq 35: Si $A \in \exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, la matrice de restriction à un sous-espace stable par A n'est pas forcément dans $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

C.ex 36: $-I_2 = \exp\begin{pmatrix} 0 & -\pi \\ \pi & 0 \end{pmatrix}$ mais sa restriction à $\mathbb{R}(1,0)$ n'est pas dans $\exp(\mathbb{R})$.

Prop 37: $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ n'est pas un sq de $GL_n(\mathbb{R})$.

Prop 38: $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \{M^2 \mid M \in GL_n(\mathbb{R})\}$.

Ex 39: $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas un carré dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donc $A \notin \exp(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$.

c) Restrictions remarquables de l'exp [CAL]

Notation 40: $S_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^T = A\}$, $H_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \bar{A}^T = A\}$.

Thm 41: (Décomposition polaire) La multiplication matricielle induit des homéomorphismes:

$$\varphi_1: \begin{cases} S_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \rightarrow GL_n(\mathbb{R}) \\ (O, S) \mapsto OS \end{cases}, \quad \varphi_2: \begin{cases} H_n(\mathbb{C}) \times H_n^{++}(\mathbb{C}) \rightarrow GL_n(\mathbb{C}) \\ (U, H) \mapsto UH \end{cases}$$

Prop 42: $\exp: S_n(\mathbb{R}) \rightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme

Prop 43: $\exp: H_n(\mathbb{C}) \rightarrow H_n^{++}(\mathbb{C})$ est un homéo.

Cor 44: On a les homéo suivants:

$$GL_n(\mathbb{R}) \simeq O_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}} \quad \text{et} \quad GL_n(\mathbb{C}) \simeq U_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{R}^{n^2}.$$

Prop 45: $\exp: \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow SO_n(\mathbb{R})$ est surjective.

App 46: Si $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \in SO_2(\mathbb{R})$, $A = \exp\begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$.

[MAN]

III) Applications

a) Réduction [MAN]

Thm 47: (Réduction de Dunford).

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ tq χ_A est scindé sur K . Alors :

$\exists ! (D, N)$ avec
 D diagonalisable
 N nilpotente
 $ND = DN$
 $A = D + N$

De plus, N, D sont des polynômes en A

Cor 48: Soit $A \in GL_n(K)$ comme ci-dessus. Alors $\exists ! (D, U)$ avec
 D diagonalisable et $U = I_m$ nilpotente tq $\begin{cases} DU = UD \\ A = UD \end{cases}$

Prop 49: Soit $A = D + N$ comme ci-dessus la décompo de Dunford (additive) $\Rightarrow$ Alors la décompo de Dunford additive de e^A est : $e^A = e^D + (e^D(e^N - I_m))$.

Ex 50: Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e^A = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2e \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 2e \\ 0 & e \end{pmatrix}$.

Prop 51: Soit $A = D + N$ comme ci-dessus. La décompo de Dunford multiplicative de e^A est : $e^A = e^D e^N$.

Prop 52: Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. On a : $\exp(\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)) = \text{Sp}_{\mathbb{C}}(\exp(A))$.

Rq 53: En général, $\exp(\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A)) \neq \text{Sp}_{\mathbb{R}}(\exp(A))$.

Par ex, si $A = \begin{pmatrix} 0 & -\pi \\ \pi & 0 \end{pmatrix}$, $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$ mais $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(\exp(A)) = \{-1\}$.

Prop 54: Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ tq χ_A est scindé sur K .
 A est diagonalisablessi e^A est diagonalisable.

Prop 55: Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisables tq $e^A = e^B$.
 Alors $A = B$.
 dans $\mathbb{R}$

C. ex 56: Résultat faux dans $\mathbb{C}$: $\exp\left(\begin{pmatrix} 0 & -\pi \\ \pi & 0 \end{pmatrix}\right) = \exp\left(\begin{pmatrix} 0 & -3\pi \\ 3\pi & 0 \end{pmatrix}\right)$

b) Equations différentielles [MAN]

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}_+$

Def 57: Un système différentiel linéaire est une équation $Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t)$ d'inconnue $Y: I \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(K)$, de coeff $A: I \rightarrow \mathcal{M}_n(K)$ et de second membre $B: I \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(K)$.

(C.4)
Prop 58: Soient $A \in \mathcal{M}_n(K)$, $Y_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$, $B \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$ et $t_0 \in \mathbb{R}_+$.
 Le système linéaire à coeff cste $\begin{cases} Y' = AY + B \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$ admet une
 unique solution donnée par $Y: t \mapsto e^{(t-t_0)A} \left(\int_{t_0}^t e^{-sA} ds B + Y_0 \right)$.

Rq 59: Pour étudier le comportement d'une solution d'un tel système, on étudie e^A , donc A .

Ex 60: Dans le cas où $B = 0$, $A \in \mathcal{M}_2(K)$ avec $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$:

- si $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$: $Y(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$

- si $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 > 0$: $(0, 0)$ n'est plus un point attractif (cf annexe).

Lemme 61: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tq $\text{Sp}(A) = \{\lambda; \text{Re}(\lambda) < 0\}$.

Alors : $\exists \alpha > 0, \exists K > 0, \forall t \geq 0, \|e^{tA}\| \leq K e^{-\alpha t}$, il l'est même sur $\mathcal{M}_n(K)$.

Prop 62: (Equation de Sylvester)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tq $\text{Sp}(A) \cup \text{Sp}(B) \subset \{\lambda; \text{Re}(\lambda) < 0\}$.

Alors : $\forall C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \exists ! X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AX + XB = C$.

En particulier : $X = - \int_0^{+\infty} e^{tA} C e^{tB} dt$.

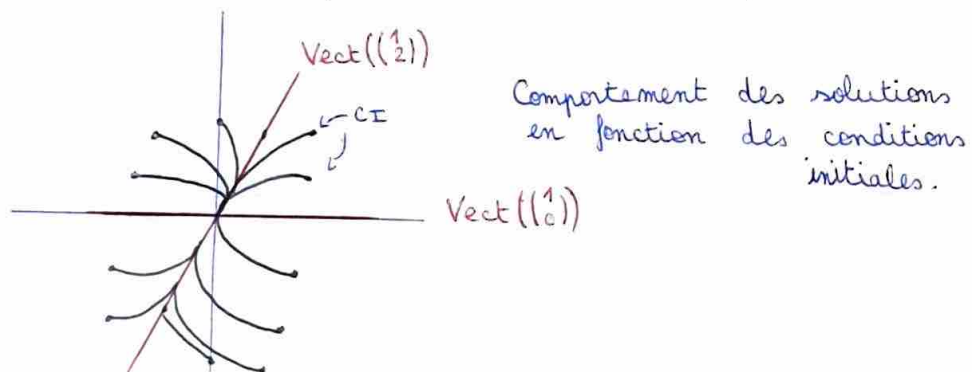
App 63: Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si $\text{Sp}(A) \cup \text{Sp}(-B) \subset \{\lambda; \text{Re}(\lambda) < 0\}$, alors $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ sont semblables.

D2
[GOU]

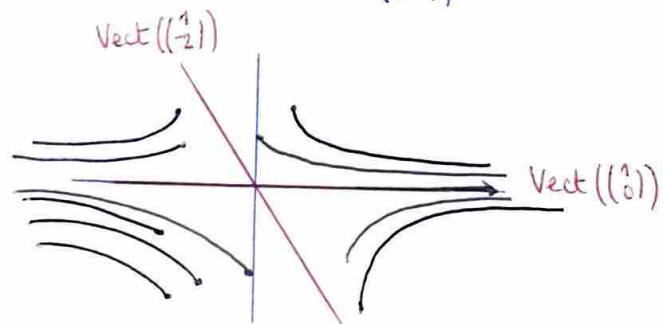
Annexe:

Ex 60, On considère l'équation $Y' = AY$ avec $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.



* Rajouter $\overline{e^A} = e^{\overline{A}}$

* $Y' = AY$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.



Références:

[BER]: Berkey, Le grand combat

[MAN]: Réduct des endomorphismes, Mansuy-Mmeimé

[ROM]: Maths pour l'agreg, Algèbre, Rombaldi

[CAL]: Histoires kédonistes de groupes
et de géométrie, Tome 1, Caldero / Jermóni

[GOU]: Analyse, Gourdon

[ZAV]: Un max de ~~temps~~ ^{maths}, Zavilique